νομα: Γιώργος Καφεντζής $\qquad$ Ημερ. Παραδ.: 5-11-2002

.Μ: 1367

3η Σειρά Ασκήσεων

ΗΥ-215

30/30

1. Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα με περίοδο T_0:

$$x(t) = \sin\frac{\omega_0}{2}t$$

το οποίο φαίνεται γραφικά στις φωτοτυπίες.

Έχουμε $x(t) = \sin\frac{\omega_0}{2}t = \sin\pi f_0 t = \sin\frac{\pi}{T_0}t$.

Για τη σειρά Fourier έχουμε:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\sin\frac{\pi t}{T_0}dt = -\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{\pi}\int_0^{T_0}\left(\cos\frac{\pi t}{T_0}\right)'dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi t}{T_0}\Big]_0^{T_0} = -\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi T_0}{T_0} + \frac{1}{\pi}\cos 0 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \boxed{X_0 = \frac{2}{\pi}}$$ ✓

$$X_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}}dt = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0}\sin\frac{\pi t}{T_0}\cdot e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}}dt =$$

$$= \frac{2}{T_0}\left(-\frac{T_0}{\pi}\right)\int_0^{T_0}\left(\cos\frac{\pi t}{T_0}\right)'\cdot e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}}dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi t}{T_0}e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}}\Big]_0^{T_0} + \frac{2}{\pi}\int_0^{T_0}\cos\frac{\pi t}{T_0}\cdot\left(e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}}\right)'dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi T_0}{T_0}e^{-j\frac{2\pi k T_0}{T_0}} + \frac{2}{\pi}\cos 0\cdot e^{-j0} + \frac{2}{\pi}\int_0^{T_0}\cos\frac{\pi t}{T_0}\left(-\frac{j2\pi k}{T_0}\right)e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}}dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left(-\frac{j2\pi k}{T_0}\right)\int_0^{T_0}\cos\frac{\pi t}{T_0}e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}}dt =$$

$$= \frac{4}{\pi} - \frac{4jk}{T_0}\int_0^{T_0}\cos\frac{\pi t}{T_0}\cdot e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}}dt = \frac{4}{\pi} - \frac{4jk}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{T_0}{\pi}\left(\sin\frac{\pi t}{T_0}\right)'e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}}dt =$$

$$= \frac{4}{\pi} - \frac{4jk}{\pi}\sin\frac{\pi t}{T_0}\cdot e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}}\Big]_0^{T_0} + \frac{4jk}{T_0}\frac{T_0}{\pi}\left(-\frac{2\pi k j}{T_0}\right)\int_0^{T_0}\sin\frac{\pi t}{T_0}e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}}dt =$$

$$= \frac{4}{\pi} - 0 - \frac{(-8k^2)}{T_0}\int_0^{T_0} \sin\frac{\pi t}{T_0} \cdot e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}} dt =$$

$$= \frac{4}{\pi} + \frac{8k^2}{T_0}\int_0^{T_0} \sin\frac{\pi t}{T_0} \cdot e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}} dt =$$

$$= \frac{4}{\pi} + 4k^2 \cdot \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} \sin\frac{\pi t}{T_0} \cdot e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}} dt =$$

$$= \frac{4}{\pi} + 4k^2 \cdot X_k \Longleftrightarrow X_k = \frac{4}{\pi} + 4k^2 \cdot X_k \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow X_k(1-4k^2) = \frac{4}{\pi} \Longleftrightarrow \boxed{X_k = \frac{4}{\pi(1-4k^2)}} \checkmark$$

Άρα τελικά η σειρά Fourier τα $x(t)$ έχει ως:

$$x(t) = \frac{2}{\pi} + Re\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)} e^{jk\omega_0 t}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \cos(k\omega_0 t) =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-4k^2} \cos(k\omega_0 t). \checkmark$$

75/40

10/10

2. Δείξτε ότι για πραγματικά σήματα ισχύει:

Άρτιο σήμα × Άρτιο σήμα = Άρτιο σήμα

Περιττό σήμα × Περιττό σήμα = Άρτιο σήμα

Άρτιο σήμα × Περιττό σήμα = Περιττό σήμα

- $x(t)$ άρτιο $\Leftrightarrow x(t)=x(-t)$, $y(t)$ άρτιο $\Leftrightarrow y(t)=y(-t)$ $\Big\} \xrightarrow{(\cdot)} x(t)\cdot y(t) = x(-t)\cdot y(-t) \Big\} \Leftrightarrow \boxed{z(t)=z(-t)}$

- $x(t)$ περιττό $\Leftrightarrow x(t)=-x(-t)$, $y(t)$ περιττό $\Leftrightarrow y(t)=-y(-t)$ $\Big\} \xrightarrow{(\cdot)} x(t)\cdot y(t) = (-x(-t))(-y(-t)) =$

$$= x(-t)\cdot y(-t) \Big\}, \quad z(t)=x(t)\cdot y(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z(t)=z(-t)}$$

- $x(t)$ άρτιο $\Leftrightarrow x(t)=x(-t)$, $y(t)$ περιττό $\Leftrightarrow y(t)=-y(-t)$ $\Big\} \xrightarrow{(\cdot)} x(t)\cdot y(t) = -(x(-t)\cdot y(-t)) \Big\}, \quad z(t)=x(t)\cdot y(t) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{z(t)=-z(-t)}.$$

20/10

1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \sin^{10} t\,dt$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval.

Το θεώρημα του Parseval συνοψίζεται στην εξίσωση $\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = A_0^2 + \sum$

Ζητάμε να υπολογίσουμε το $\int_0^{T_0} x^2(t)dt$, όπου $T_0 = 2\pi$.

Αναλύουμε το $x(t)$ σε σειρά Fourier:

$$x(t) = \sin^5(t) = \left(\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right)^5 = \frac{(e^{jt}-e^{-jt})^5}{32j} \quad (1).$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Νεύτωνα,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + nab^{n-1} + b^n,$$

η (1) γράφεται:

$$x(t)=\frac{1}{32j}\left(e^{5jt}-5e^{4jt}\cdot e^{-jt}+10e^{3jt}\cdot e^{-j2t}-10e^{2jt}\cdot e^{-3jt}+5e^{jt}\cdot e^{-j4t}-e^{-5jt}\right)=$$

$$=\frac{1}{32j}\left(e^{5jt}-e^{-5jt}-5e^{3jt}+5e^{-3jt}+10e^{jt}-10e^{-jt}\right)=$$

$$=\frac{1}{32j}\left(2j\sin 5t+10j\sin(-3t)+20j\sin t\right)=$$

$$=\frac{1}{32j}\left(2j\sin 5t-10j\sin 3t+20j\sin t\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\sin 5t-\frac{5}{16}\sin 3t+\frac{5}{8}\sin t=\frac{5}{8}\sin t-\frac{5}{16}\sin 3t+\frac{1}{16}\sin 5t.$$

Άρα $x(t)=\frac{5}{8}\sin t-\frac{5}{16}\sin 3t+\frac{1}{16}\sin 5t$ και σύμφωνα με το θεώρημα του

Parseval, έχουμε: $\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x^2(t)dt=A_0^2+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{A_k^2}{2}\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin^5 t)^2dt=0^2+\sum_{k=1}^{5}\frac{A_k^2}{2}=\frac{A_1^2}{2}+\cancel{\frac{A_2^2}{2}}^{0}+\frac{A_3^2}{2}+\cancel{\frac{A_4^2}{2}}^{0}+\frac{A_5^2}{2}=$$

$$=\frac{A_1^2}{2}+\frac{A_3^2}{2}+\frac{A_5^2}{2}=\frac{\left(\frac{5}{8}\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{5}{16}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{16}\right)^2}{2}=\frac{126}{512}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\int_0^{2\pi}(\sin^5 t)^2dt=2\pi\frac{126}{512}=1,54625.$$

10/10

5. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

α. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\omega t}{\omega}d\omega$

β. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\omega t}{\omega}dt$ για $\omega=\frac{\pi}{6}$

$\omega=2$.

β. • $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\omega t}{\omega}dt=\frac{1}{\omega}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\omega t\,dt=\frac{1}{\omega^2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin\omega t)'dt=\left[\frac{1}{\omega^2}\sin\omega t\right]_{-\pi}^{\pi}=$

$$= \frac{-1}{\omega^2}\sin\omega(-\pi) + \frac{1}{\omega^2}\sin\omega\pi = \frac{-1}{(\frac{\pi}{6})^2}\sin\frac{\pi}{6}(-\pi) + \frac{1}{(\frac{\pi}{6})^2}\sin\frac{\pi}{6}\pi = \frac{-36}{\pi^2}\sin\left(-\frac{\pi^2}{6}\right) + \frac{36}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{6}$$

$$= \frac{-36}{\pi^2}\left(-\sin\frac{\pi^2}{6}\right) + \frac{36}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{6} = +\frac{72}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{6} = +7,275$$

- $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\omega t}{\omega}dt = \left[\frac{1}{\omega^2}\sin\omega t\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-1}{\omega^2}\sin(-\pi)\omega + \frac{1}{\omega^2}\sin\omega\pi =$

$$= \frac{-1}{2^2}\sin(-2\pi) + \frac{1}{2^2}\sin 2\pi = \frac{-1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 0 = 0.$$

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\omega) = \frac{\cos\omega t}{\omega}$

Έχουμε ότι η g είναι περιττή.

<u>Απόδειξη:</u> Είναι $g(\omega) = -g(-\omega) \Leftrightarrow \frac{\cos\omega t}{\omega} = -\frac{\cos(-\omega t)}{-\omega} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\omega t}{\omega} = \frac{\cos(-\omega t)}{\omega} \underset{\cos(-\omega t)=\cos\omega t}{\Leftrightarrow} \frac{\cos\omega t}{\omega} = \frac{\cos\omega t}{\omega}.$$

Από γνωστό θεώρημα ("όταν μια συνάρτηση περιττή ολοκληρώνεται σε συμμετρικό διάστημα $(-\alpha, \alpha)$, το ολοκλήρωμα είναι μηδέν"), έχουμε ότι $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\omega t}{\omega}d\omega = 0$

24/25

5. Στην προηγούμενη άσκηση αναπτύξατε σε σειρά Fourier το σήμα:

$$x(t) = \sin \frac{\omega_0}{2} t$$

Αν στο ανάπτυγμα αυτό διατηρήσατε μόνο τους τρεις πρώτους όρους A_1, A_2, A_3 και το σταθερό όρο, δηλαδή δημιουργήσατε το σήμα $x_3(t)$, πόσο ποσοστό της ολικής ισχύος του αρχικού σήματος $x(t)$ (υπολογισμένη σε μια περίοδο) θα περιέχεται στο σήμα $x_3(t)$;

Το σήμα $x_3(t)$ είναι το: $x_3(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{1-4k^2} \cos k\omega_0 t$.

Για να βρούμε την ισχύ του σήματος, θα εφαρμόσουμε το θεώρημα του Parseval και άρα θα έχουμε:

$$E = A_0^2 + \frac{1}{2}\left[A_1^2 + A_2^2 + A_3^2\right] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{4}{\pi(1-4)}\right)^2 + \left(\frac{4}{\pi(1-16)}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{4}{\pi(1-\cancel{35}\,36)}\right)^2\right] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{2}\left[\frac{16}{9} + \frac{16}{225} + \frac{16}{1225}\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{16}{18} + \frac{16}{450} + \frac{16}{2450}\right) = 0{,}4052 + 0{,}10132(0{,}930975) =$$

$= 0{,}49961$. Όμως η ολική ενέργεια του σήματος είναι:

$$E = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sin^2\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left(\frac{1-\cos(\omega_0 t)}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{1}{2}dt - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{\cos(\omega_0 t)}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{2T_0}t\Big]_0^{T_0} - \frac{1}{2T_0}\frac{1}{}\int_0^{T_0}(\sin(\omega_0 t))'dt =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4T_0\omega_0}\sin\omega_0 t\Big]_0^{T_0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4T_0\omega_0}\sin\omega_0 T_0 + 0 = \frac{1}{2}.$$

Άρα το ποσοστό της ισχύος του x_3 είναι 99,9226 % του $x(t)$. ✓

99,9632%

20/20

6. Χωρίς να κάνετε αναλυτικά τις πράξεις αλλά βασισμένοι στο αποτέλεσμα της άσκησης 4, αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα το οποίο φαίνεται γραφικά στο σχήμα στις φωτοτυπίες.

Το σήμα της άσκησης 4 έχει μετακινηθεί κατά $\frac{T_0}{2}$ αριστερότερα. Έτσι προκύπτει το νέο σήμα της άσκησης 6.

Οι συντελεστές Fourier του νέου σήματος λοιπόν, είναι:

$$X_k = \frac{4}{\pi(1-4k^2)} e^{j(k\omega_0 \frac{T_0}{2})} = \frac{4}{\pi(1-4k^2)} e^{jk\frac{2\pi}{T_0}\frac{T_0}{2}} = \frac{4}{\pi(1-4k^2)} e^{jk\pi} =$$

$$= \frac{4}{\pi(1-4k^2)} (-1)^k .$$

Άρα: $x(t+\frac{T_0}{2}) = A + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(1-4k^2)} \cos k\omega_0 t .$ ✓